THESE DE DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES PHYSIOUE

DE Claude G. BONTHOUX

DEUXIEME SUJET

PROPOSITION DONNEE PAR L'UNITE

D'ENSEIGNEMENT ET DE RECHERCHE 49

PARIS VI

APPLICATION DE LA THEORIE DES GRAPHES ET DE L'ETUDE DES FAMILLES LINEAIRES DE TORSEURS A L'ANALYSE DE LA MOBILITE DES MECANISMES

Soutenue le 26 Avril 1973 devant la commission d'examen

R. SIESTRUNCK	Président
P. BROUSSE	Rapporteur
Y. THIRY	Examinateur

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

APPLICATION DE LA THEORIE DES GRAPHES ET DE L'ETUDE DES FAMILLES LINEAIRES DE TORSEURS A L'ANALYSE DE LA MOBILITE DES MECANISMES

Pour rationnaliser le fonctionnement des machines qui se sont multipliées à la fin du siècle dernier, de nombreux modèles d'assemblages de solides ont été conçus et améliorés. Les traités de cinématique nous en font une très large description et très souvent abordent une classification basée sur des critères de transformation de mouvement ou de transformation de vitesse.

Pourtant la nature des liaisons entre les éléments des mécanismes est primordiale et il est vite apparu nécessaire d'utiliser ce moyen pour faire une énumération plus logique des assemblages. Les mathématiques classiques n'ont pas permis de faire d'énormes progrès.

La théorie des graphes, développée par la recherche opérationnelle, appliquée récemment aux assemblages, donne une vision nouvelle de la cinématique sur des bases mathématiques susceptibles de prolongement. Alliée à l'étude systématique des familles linéaires de torseurs, générateurs des mouvements possibles, la théorie des graphes est un élément puissant de raisonnement pour étudier la mobilité des mécanismes.

Ce moyen vient de remettre à l'ordre du jour les problèmes de classification.

1ère Partie - GENERALITES ET RAPPELS

1. Les Couples Cinématiques

On appelle couple cinématique ou couple binaire tout assemblage mobile de deux corps solides en contact. Dans toute la suite, nous supposerons avoir des liaisons parfaites.

Un couple binaire sera dit de classe i si le mouvement relatif instantané des deux corps qu'il relie est engendré par un torseur à i composantes, réciproque d'un torseur de liaison statique à 6-i composantes. On dit aussi que le couple laisse i degrés de liberté au mouvement relatif.

Exemples a) Les liaisons permettant une rotation pure autour d'un axe, ou une translation pure le long d'un axe ou une rotation et une translation liées, sont de classe 1.
(Couple rotoïde, couple prismatique, couple vis-écrou).

b) Les liaisons permettant une rotation et une translation indépendantes ou autorisant deux rotations indépendantes sont de classe 2 (couple cylindrique ou verrou, ou couple de liaison par maillons toriques).

c) Les liaisons permettant trois rotations indépendantes, ou une translation et deux rotations, ou deux translations et une rotation sont de classe 3 (couple sphérique ou couple plan).

d) Les liaisons permettant une translation et trois rotations ou deux translations et deux rotations sont de classe 4 (Tenon sphérique coulissant dans une glissière cylindrique, ou contact d'un cylindre avec un plan : couple de contact linéaire).

e) Les liaisons permettant deux translations et trois rotations forment un couple de classe 5 (contact d'une sphère avec un plan : couple de contact ponctuel).

f) Si la liaison est de classe 6, il n'y a plus de contact entre les deux solides.

Chaque couple peut donc être défini par le nombre de degrés de liberté relatif qu'il laisse (ou par le torseur à i composantes qui engendre le mouvement relatif possible) ou représenté par le torseur de liaison statique à 6-i composantes.

.../...

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Une chaîne cinématique est une réunion de corps rigides dénommés chaînons, liés entre eux par des couples cinématiques.

L'analyse d'une chaîne comprenant k_i couples de classe i ($1 \leqslant i \leqslant 5$) peut donc indifféremment être faite à partir des k_i torseurs à i composantes engendrant les mouvements relatifs ou à partir des k_i torseurs réciproques de liaison statique.

2. Les familles linéaires de torseurs et leurs rangs.

L'ensemble des torseurs définis par leurs éléments de réduction à l'origine des coordonnées cartésiennes constitue un espace vectoriel à six dimensions.

L'utilisation de la représentation duale des torseurs permet de trouver facilement une base orthonormée formée de trois glisseurs unitaires et de trois torseurs impropres (réf. [1] et [2]).

Les composantes du torseur général sur cette base sont ses coordonnées plückeriennes habituelles.

Le rang maximal d'un ensemble quelconque de torseurs, défini comme celui de la matrice de leurs coordonnées est donc 6.

Toute dépendance linéaire entre les torseurs est susceptible d'abaisser le rang du torseur général.

Les applications à la statique et à la cinématique nécessitent de savoir apprécier aussi simplement que possible le rang d'un système de torseurs donnés.

Diverses publications (réf. [2] [3] et [4]) récapitulent dans un tableau les configurations des torseurs formant les ensembles de rang 1 à 5.

D'une façon générale, s'il existe des relations de liaisons géométriques, telles que la famille dépende d'un paramètre, les éléments du torseurs appartiennent à une série réglée (conoïde de Plücker). Si la famille dépend de deux paramètres, les éléments du torseur forment une congruence et si la famille dépend de trois paramètres ils appartiennent à un complexe.

Les cas géométriques, entraînant un abaissement du rang, les plus fréquemment rencontrés sont rappelés ci-dessous.

a) Rang 1 :

Un torseur unique (éventuellement pouvant résulter d'une somme de torseurs de même axe et même pas) correspondant

.../...

à un couple de classe 1 ou 5 selon que l'on parle du torseur qui engendre le mouvement relatif ou du torseur de liaison statique.

C'est le cas d'une rotation pure (torseur impropre), d'une translation pure (glisseur) d'un mouvement hélicoïdal (torseur).

b) Rang 2 :

C'est le cas de deux vis-écrous quelconques (2 couples de classe 1 ou 5) ou de torseurs de même pas à axes coplanaires et concourants ou à axes coplanaires parallèles en nombre supérieur ou égal à 2.

c) Rang 3 :

C'est le cas de trois vis-écrous quelconques (3 couples de classe 1 ou 5) ou de torseurs de même pas coplanaires, ou parallèles dans l'espace, ou concourants en nombre supérieur ou égal à 3.

d) Rang 4 :

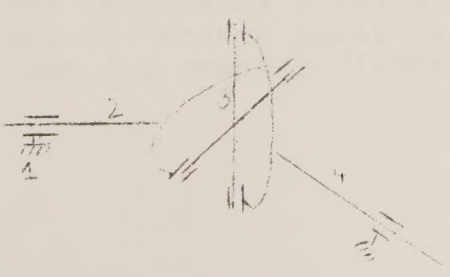
C'est le cas de quatre vis-écrous quelconques (4 couples de classe 1 ou 5) ou de torseurs de pas quelconques parallèles en nombre supérieur ou égal à 4.

e) C'est le cas de cinq vis-écrous quelconques (5 couples de classe 1 à 5 ou de torseurs de pas quelconques, parallèles à un plan donné rencontrant une droite donnée, ou appartenant à deux étoiles de droites concourantes, en nombre supérieur ou égal à 5.

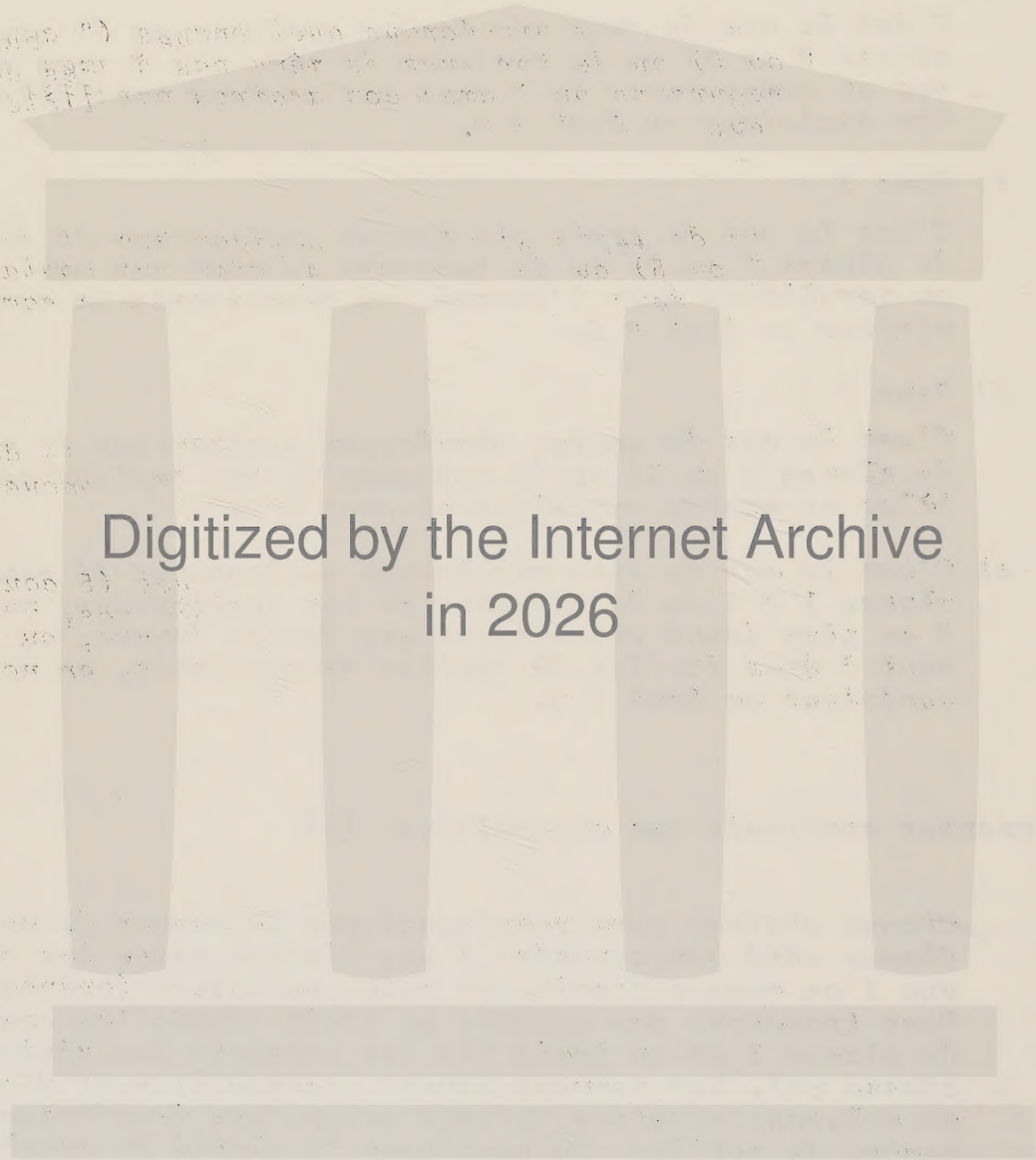
3. Les graphes appliqués aux assemblages. [5]

Chaque chaînon sera représenté par un sommet de graphe. Chaque côté correspondra à une liaison entre les chaînons, que l'on pourra distinguer selon sa nature (graphe coloré) Nous tracerons par exemple en trait épais les couples de classe 1 et en trait fin les contacts (en général de classe ≥ 2). Les sommets seront avantageusement disposés en polygone régulier faisant apparaître immédiatement le nombre de solides. On peut pour la clarté du graphe ordonner les sommets pour réduire au maximum les intersections de côtés.

Exemple 1. Joint de Cardan. Chaîne simple



.../...



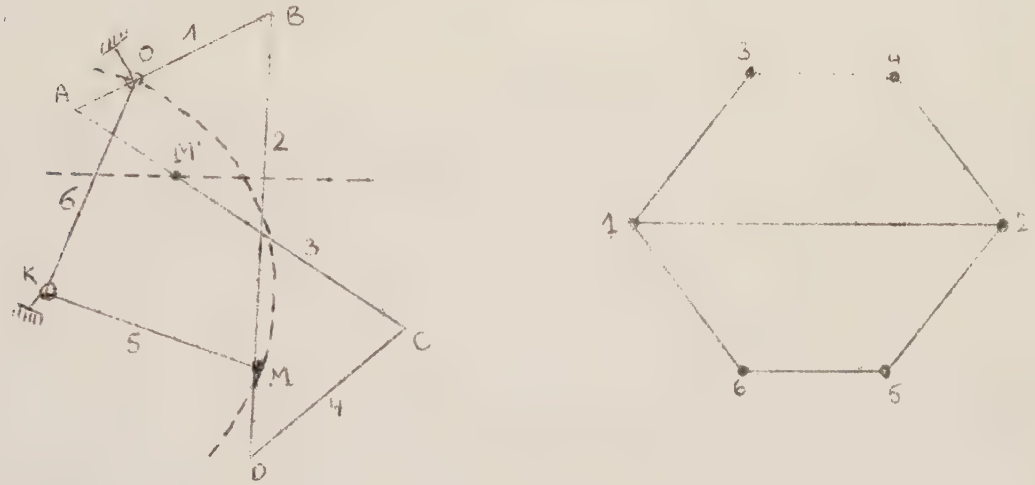
Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548020_0005

Exemple 2. Train épicycloïdal. Chaîne complexe.

Exemple 3. Chaîne de Watt. Chaîne complexe.

C'est un mécanisme permettant de guider un point sur une liane droite sans utiliser de glissière. Il utilise un inverseur de Hart.



Quelques remarques générales peuvent être faites (réf. [6])

Le graphe représentatif d'une chaîne cinématique est connexe, c'est-à-dire d'un seul tenant et n'a généralement pas d'extrémités arborescentes, les différentes pièces d'un mécanisme ayant toujours au moins deux liaisons. Il en résulte que par chaque sommet du graphe passe au moins un circuit, chemin fermé n'empruntant que des côtés différents du graphe.

Le nombre cyclomatique du graphe ou nombre de circuits indépendants (différant entre eux par au moins un côté) est donné par :

$$v = n - b + 1$$

Il est à noter que cette représentation ne permet pas de caractériser la fonction de l'assemblage. Un même graphe peut représenter différents mécanismes n'ayant pas la même fonction , et des mécanismes différents ayant la même fonction peuvent être représentés par des graphes différents.

.../...

Nous avons vu que l'analyse d'une chaîne peut se faire à partir du torseur de liaison statique (étude statique du système) ou du torseur générateur des mouvements relatifs. (Etude cinématique). Dans ce dernier cas, pour chaque chaîne fermée, on pourra écrire que le torseur formé par les différents générateurs est nul.

Toute chaîne fermée est un circuit. La théorie des graphes va nous aider à dénombrer les chaînes fermées d'un mécanisme. Pour écrire les équations de compatibilité de la chaîne, il faudra alors faire intervenir le minimum de chaînes fermées indépendantes (sinon certaines équations seront des combinaisons de ces systèmes indépendants).

Le nombre de chaînes fermées du mécanisme est donc le nombre cyclomatique du graphe correspondant à l'assemblage.

4. La mobilité d'un assemblage.

Les premières définitions de la mobilité d'un mécanisme associaient cette notion au nombre de paramètres qui fixent dans l'espace sa configuration. Elles s'énonçaient de la façon suivante : Le nombre de degrés de liberté d'une chaîne cinématique par rapport à un chaînon fixe s'appelle degré de mobilité de la chaîne.

De nombreuses formules ont été avancées (Réf. [7], [8], [9]) soit pour les mécanismes plans, soit pour les chaînes spatiales.

Mais ces formules ne sont pas applicables à toutes les chaînes cinématiques. Il est possible qu'un couple de classe i supprime au mouvement relatif des deux éléments qu'elle lie 6-i degrés de liberté, mais qu'elle ne supprime pas $\sum k_i(6-i)$ degrés de liberté à la chaîne toute entière si il existe k_i couples de classe i. C'est par exemple le cas si il y a abaissement du rang du torseur cité précédemment pour des raisons géométriques, particulières à la réalisation de la chaîne.

On a donc été amené à définir la mobilité d'une chaîne à partir du nombre de paramètres scalaires <u>cinématiques</u> (au lieu de <u>géométriques</u>) indépendants, nécessaires à déterminer l'état cinématique de la chaîne pour une configuration donnée. L'obtention de nouvelles relations a alors fait l'objet de nombreuses publications qui sont rappelées dans [10].

Il est proposé ici la définition d'un indice de mobilité, basée sur la recherche du rang d'une matrice représentative d'équations cinématiques de la chaîne.

.../...

2ème Partie - INDICE DE MOBILITE DES MECANISMES.

1. Etude statique

Considèrons un assemblage de b chaînons et n couples cinématiques dont k_i sont de classe i. [11]

L'étude statique du système dans une configuration donnée, en présence de forces extérieures met en jeu 6-i inconnues de liaison par couple de classe i. On peut écrire 6 équations d'équilibre relatif pour chaque solide dans le référentiel lié à l'un d'eux. L'analyse statique se ramène donc à résoudre un système linéaire (S) avec seconds membres (Forces extérieures) de E_S équations à I_S inconnues de liaison où

$$(S)\begin{cases} E_S = 6(b-1) \\ I_S = \sum_i (6-i)k_i = 6n - \sum_i ik_i \end{cases}$$

L'assemblage sera mobile si le système est impossible, c'est-à-dire si le rang de sa matrice est inférieur au nombre d'équations.

2. Etude cinématique.

Nous venons de voir (1° partie, paragraphe 3) que l'étude cinématique met en jeu i degrés de liberté relatifs par couple de classe i et que l'on peut écrire 6 équations par chaîne fermée indépendante du mécanisme.

L'analyse cinématique se ramène donc à résoudre un système linéaire homogène (C) de E_C équations à I_C inconnues (degrés de liberté relatifs) où

$$(C)\begin{cases} E_C = 6(n-b+1) \\ I_C = \sum_i ik_i \end{cases}$$

L'assemblage sera bloqué si la solution est unique (ce sera la solution banale), c'est-à-dire si le rang de la matrice est égal au nombre d'inconnues.

3. Réciprocité de deux points de vue.

Il est évident que ces deux façons de voir sont réciproques et que l'on a :

$$E_S + E_C = 6\ n = I_S + I_C$$

.../...

En effet (S) et (C) traduisent par deux mises en équations différentes les mêmes propriétés géométriques

4. Nous appellerons assemblage <u>normal</u> tout mécanisme où le rang de (S) ou de (C) est égal au plus petit de leurs nombres de lignes ou de colonnes.

Dans ce cas, si un assemblage normal n'a plus aucune <u>mobilité</u>, le système (C) admet la solution banale et :

$$r_C = I_C \leq F_C$$

Ce même système aura une solution indéterminée si :

$$r_C = F_C < I_C$$

et le mécanisme pourra bouger.

On peut donc introduire un <u>indice de mobilité</u> m de la façon suivante :

$$m = I_C - F_C = \sum_i ik_i - 6(n-b+1)$$

qui correspond d'ailleurs sur le plan statique à :

$$m = E_S - I_S$$

On aurait pu en effet faire le même raisonnement que ci-dessus pour le système (S). Il peut y avoir mouvement si :

$$r_S = I_S < F_S$$

c'est-à-dire qu'on ne peut pas trouver de forces de liaison susceptibles de bloquer le mouvement.

Au contraire, on peut trouver ces composantes de liaison statique (système bloqué) de façon unique ou indéterminée dès que :

$$r_S = F_S \leq I_S$$

5. En conclusion, l'assemblage normal se comporte dans la configuration considérée comme un mécanisme à m paramètres dès que $m > o$:

$$F_S > I_S \text{ ou } I_C > F_C$$

si $m \leq o$, le système est bloqué. C'est une structure isostatique si $m = o$ (solution unique pour les forces de liaison). C'est une structure hyperstatique d'ordre $|m|$ si $m < o$ (solution indéterminée d'ordre m pour les forces de liaison).

.../...

Exemple 1. $m > o$ 7 solides avec 7couples rotoïdes d'axes quelconques.

$b = 7$, $n = 7$, $i = 1$; $F_S = 36$, $I_S = 35$; $m = 1$; $F_C = 6$, $I_C = 7$

Exemple 2. $m = o$ 6 solides avec 6 couples rotoïdes de directions quelconques.

$b = 6$, $n = 6$, $i = 1$; $F_S = 30$, $I_S = 30$; $m = o$; $F_C = $, $I_C = 6$

Exemple 3. $m < o$ 5 solides 5 couples rotoïdes d'axes quelconques

$b = 5$, $n = 5$, $i = 1$; $F_S = 24$, $I_S = 25$; $m = -1$; $F_C = 6$, $I_C = 5$

6. Assemblages contraints

On appelle <u>contraint</u> ou <u>paradoxal</u> dans une configuration donnée un assemblage dont les particularités géométriques conduisent les rangs r_S et r_C des systèmes (S) et (C) à des valeurs inférieures au plus petit des nombres de leurs lignes et colonnes.

r_S et r_C sont liés comme nous l'avons vu ci-dessus, car les deux systèmes traduisent par deux mises en équations différentes les mêmes propriétés géométriques.

Le système (C) se présente alors sous les formes suivantes :

(C)

Dans tous les cas, on a une solution indéterminée d'ordre $I_C - r_C$. L'assemblage contraint se comporte comme un mécanisme à $m_C = I_C - r_C$ paramètres.

m_C est toujours positif et plus grand que m.

Réciproquement, le système (S) a les formes suivantes :

(S)

$m \geq 0$

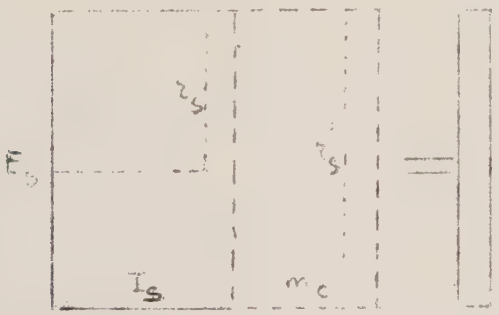
$m \leq 0$

Dans tous les cas le système (S) est impossible puisque :

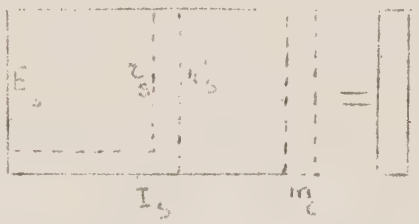
$$r_S < F_S$$

ce qui prouve également qu'il y a mobilité.

En ajoutant à (S) m_C nouvelles inconnues de forces extérieures propres à bloquer le jeu du mécanisme (m_C précisé ci-dessus), on obtient un système de F_S équations à $I_S + m_C$ inconnues redevenu normal. C'est-à-dire que le nouveau rang r'_S est égal au plus petit nombre de lignes. Le système se présente alors sous les formes



ou



avec obligatoirement $r'_S = F_S < I_S + m_C$

La solution est alors indéterminée d'ordre

$$(I_S + m_C) - F_S = m_C - m$$

Appelons $- m_S$ la quantité $m_C - m$ qui est toujours positive.

.../...

Le système (S) rendu possible par l'introduction de ces quantités dans les actions extérieures, donne les efforts de liaisons internes avec le degré d'indétermination - m_S. Or ce degré d'indétermination est le même que celui du système (S) si on supprimait les seconds membres, c'est-à-dire $I_S - r_S$.

On peut donc introduire l'indice complémentaire :

$$m_S = r_S - I_S$$

et cette relation nous indique que les efforts de liaison internes sont hyperstatiques d'ordre $|m_S|$.

r_S et r_C sont bien sûr liés. Avant $m_C + m_S = m$

$$\text{il en résulte } r_S - r_C = 6(b-1) - \sum_i ik_i$$

En résumé, l'abaissement du rang des matrices (S) et (C) par les compatibilités géométriques d'une configuration conduit nécessairement à une augmentation de la mobilité d'un assemblage ($m_C > m$).

Cette définition plus générale de m_C est également valable pour les mécanismes normaux.

En effet si :

$m > o$ $\quad m_C = m \quad$ $m_S = o$

$m \leq o$ $\quad m_C = o \quad$ $m_S = m$

La relation $m_C + m_S = m$ montre qu'il y a compensation exacte au niveau constant m, des libertés paradoxales que la géométrie du montage peut faire apparaître dans l'assemblage, et des composantes supplémentaires que laisse indéterminée, de ce fait, la statique interne du système bloqué.

C'est la connaissance du mode de déformation et de l'élasticité des liaisons qui permettra de lever cette indétermination.

La pierre d'achoppement de cette puissante méthode de raisonnement est la détermination du rang r_S ou r_C des systèmes d'équations.

Dans le cas des chaînes simples, il est relativement aisé de trouver le rang du système (C) avec les résultats définis à la première partie paragraphe 2. Le problème est beaucoup plus ardu dans les chaînes complexes.

D'autre part cette analyse n'est que locale et en principe, sauf évidence des configurations, il faut tout recommencer dans les positions voisines si on veut être sûr d'une plage finie de fonctionnement.

7. Les chaînes simples.

Nous dirons que l'assemblage est en chaîne simple si il y a autant de couples cinématiques que de solides et si le graphe ne comprend qu'un seul circuit passant par tous les sommets. C'est par exemple le cas du joint de Cardan vu dans la 1° partie paragraphe 3.

.../...

Les systèmes (S) et (C) s'écrivent alors :

$$(S)\begin{cases} F_S = 6(n-1) \\ I_S = 6n - \sum_i ik_i \end{cases} \qquad m = \sum_i ik_i - 6 \qquad (C)\begin{cases} F_C = 6 \\ I_C = \sum_i ik_i \end{cases}$$

Le rang du système (C) est le plus aisé à trouver. C'est celui de l'ensemble des n torseurs générateurs des mouvements relatifs des différents solides.

$$m_C = m + 6 - r_C$$

$$\text{ou } m_C = m + r_C^* \qquad \text{et } m_S = -r_C^*$$

r_C^* est le rang $6 - r_C$ de l'ensemble réciproque des torseurs cinématiques.

Exemple 1. Double Cardan homocinétique. Mécanisme paradoxal.

$$b = n = k_1 = 6 \qquad \text{d'où } m = o$$

On a donc $m_C = r_C^*$ qu'il reste à définir.

Les 6 torseurs générateurs du mouvement forment deux faisceaux concourants. Le rang de cet ensemble est donc de 5 d'où

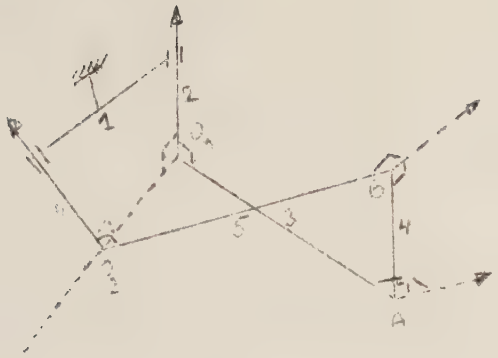
$$m_C = r_C^* = 1 \qquad m_S = -1$$

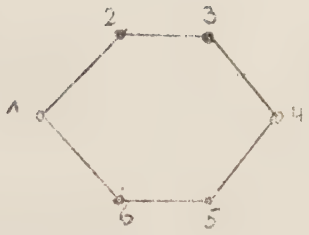
Le joint a bien la mobilité unité et il est hyperstatique intérieurement d'ordre 1.

Exemple 2. Chaîne fermée paradoxale de 6 solides à 6 couples rotoïdes.

Nous avons vu (2°partie paragraphe 5) que la mobilité d'un assemblage de 6 solides avec 6 couples rotoïdes d'axe quelconque est nulle. Constituons une chaîne où les 6 axes de rotation coupent une même droite

.../...





$h = n = k_1 = 6$ d'où $m = 0$

$r_C^* = m_C$

Les 6 axes des torseurs passent tous une même droite $o_1 o_2$.
Le rang du torseur général est donc de 5 soit $r_C^* = 1$
Cet assemblage a la mobilité unité.

Exemple 3. Joint de Cardan (1° partie paragraphe 3).

$h = n = k_1 = 4$ d'où $m = -2$

Les torseurs générateurs des mouvements relatifs (glisseurs de rotation pure) forment un ensemble de rang $r_C = 3$.
En effet les 4 directions des glisseurs sont concourants . $r_C^* = 3$ d'où :

$$m_C = 1 \quad et \quad m_S = -3$$

Le joint a bien la mobilité unité et il est hyperstatique intérieurement d'ordre 3.

3ème Partie - LES CHAINES COMPLEXES.

1. Idée directrice

Nous dirons que l'assemblage est une chaîne complexe, si le graphe comprend plusieurs circuits. C'est par exemple le cas du train épicycloïdal ou de la chaîne de Watt vus au paragraphe 3 1° partie.

On ne peut plus espérer avoir des relations aussi simples que celles qui viennent d'être obtenues.

Il est cependant tentant de reprendre l'étude du système (C) et d'essayer d'utiliser les résultats précédents. Pour cela, on considère la chaîne comme formée de la juxtaposition des circuits indépendants. Le système (C) est alors constitué d'autant de groupes d'équations représentant le fonctionnement cinématique qu'il y a de circuits.

Pour chacun de ces groupes d'équations, on peut encore préciser le rang géométrique de l'ensemble générateur correspondant à chaque chaîne simple, d'où le nombre de variables indépendantes pour chaque circuit.

Mais ces groupes d'équations ne sont pas indépendants.

Le fait que certains côtés du graphe appartiennent en commun à plusieurs circuits, entraîne la présence d'<u>inconnues redondantes</u> dans les groupes d'équations.

En conséquence, le système global formé par les différents groupes d'équations a donc un rang moindre.

La difficulté est que ce rang n'a pas une interprétation géométrique évidente et il est difficile de l'apprécier directement.

On peut malgré tout mettre en place une méthode de résolutions assez systématique pour que l'ordre du système résiduel soit aussi faible que possible. Il faut pour cela utiliser un ensemble de circuits indépendants de moindre redondance (base "minimale" du graphe) et choisir comme variables indépendantes des résolutions partielles, les paramètres les plus redondants.

2. Application au train épicycloïdal à s satellites

Considérons la figure déjà utilisée à la page 5 et supposons que le train a s satellites.

$$\left.\begin{array}{l} b = 3 + s \\ k_1 \text{ couples rotoïdes} = 2 + s \\ k_5 \text{ couples de contact} = 2\ s \end{array}\right\} \begin{array}{l} n = 2+3s \\ \sum_i i k_i = 2+s+5(2s) = 2+11s \end{array}$$

$$(S)\ \left\{\begin{array}{l} E_S = 12 + 6\ s \\ I_S = 10 + 7\ s \end{array}\right. \qquad m = 2 - s$$

.../...

Pour rendre le problème plus général, remplacons les contacts des dentures par des articulations rotoïdes aux points de roulement des cercles primitifs. Traitons le sustème en plan. Le graphe est ainsi non coloré.

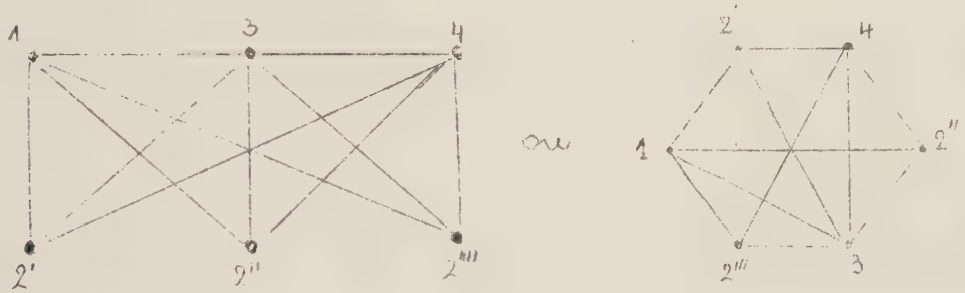
$$b = 3 + s$$

$$\left.\begin{array}{l} k_1 \text{ couples rotoïdes} = 2 + s \\ k_2 \text{ couples de contacts} = 2s \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} n = 2 + 3s \\ \sum i k_i = 2 + 5s \end{array}$$

$$(S)\left\{\begin{array}{l} F_S = 6 + 3s \\ I_S = 4 + 4s \end{array}\right. \qquad m = 2 - s$$

La mobilité est donc la même si l'on considère le sustème plan.
Le parallélisme des axes apporte la plage finie de fonctionnement

Dans le cas d'un train a 3 satellites (2',2",2"'), $m = -1$.
Le graphe a l'allure suivante



Nous avons alors $(n-b+1)=6$ circuits indépendants :

1 3 2' 1	1 3 2" 1	1 3 2"' 1
4 3 2' 4	4 3 2" 4	4 3 2"' 4

Mais on u trouve 3 variables doubles (32',32",32"') et 2 variables triples (13,43).

Pour chacun des circuits considéré seul

$$b = 3 \qquad \left\{\begin{array}{l} F_C = 3 \\ I_C = 3 \end{array}\right. \qquad m = 0 \quad r_c = 0$$

$$n = 3 \qquad \left\{\begin{array}{l} \\ I_C = 3 \end{array}\right. \qquad m_C = r^*_C = 1$$

$$m_C = 1$$

Une seule variable est indépendante par circuit. On peut résoudre les équations des circuits 1 3 2 1 en ω_{13} et celles des circuits 4 3 2 4 en ω_{34} qui sont les variables les plus redondantes et qui représenteront les variables indépendantes.

.../...

En réalité, pour les circuits ayant même satellite la liaison se traduit par le fait que ω_{23} est identique dans chaque circuit. Il en résulte une liaison entre ω_{13} et ω_{34}.

Pour chaque satellite, on a donc 1 équation à 2 inconnues du type $\omega_{31} = (1 - \lambda)\omega_{34}$ où $-\lambda$ est défini par le rapport du rayon de la couronne 3 au rayon du pignon central 1.

Le train épicycloïdal à 3 satellites peut donc être <u>réduit</u> au système de 3 équations à 2 inconnues.

$$(C') \begin{cases} \omega_{31} = (1-\lambda')\omega_{34} \\ \omega_{31} = (1-\lambda'')\omega_{34} \\ \omega_{31} = (1-\lambda''')\omega_{34} \end{cases}$$

Cette mise en équation correspond toujours bien à une mobilité

$$m = I_{C'} - E_{C'} = -1$$

Le système linéaires homogène (C') aura une solution non banale si son rang est plus petit que 2. On aura par exemple $R = 1$ si $\lambda' = \lambda'' = \lambda'''$ et le système sera mobile.

Si on applique les résultats obtenus pour les chaînes simples, sa mobilité sera

$$m_C = m + R^*$$

où m représente la mobilité correspondant au système d'équations résiduel (C') et R^* le rang complémentaire de ce même système.

Dans le cas présent

$$m_C = -1 + 2 = 1$$

La mobilité cinématique est unité et le système est hyperstatique d'ordre R^* soit 2. En effet deux satellites sur les trois constituent des liaisons passives qui ne jouent aucun rôle si ce n'est pour équilibrer le mouvement.

3. Relation donnant la mobilité cinématique d'une chaîne complexe.

Nous sommes tentés d'écrire une relation donnant m_C à partir du raisonnement précédent. En pratique, il ne semble pas qu'elle soit applicables à toutes les chaînes complexes.

La mobilité m de la chaîne qui correspond à la différence $I_C - E_C$ du système (C') résiduel peut être définie à partir du nombre total de variables indépendantes, tous les circuits étant juxtaposés, et du nombre ρ de redondances des variables.

On a

$$m_C = \sum_k (m_k + r^*_{Ck}) - \rho$$

.../...

Par exemple dans le train planétaire,

$$m = 6 - 7 = -1$$

La mobilité cinématique peut s'exprimer par :

$$m_c = \sum_k (m_k + r^*_{Ck}) - p + p^*$$

La difficulté est d'une part de trouver pour un graphe donné le nombre de redondances et d'autre part, le rang du système résiduel correspondant.

Nous avons pu mener à bien cette méthode dans le cas des trains d'engrenages car il suffit d'écrire les seules équations faisant intervenir les ω. Normalement la loi de composition des mouvements concerne également les vitesses.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. SIESTRUNCK "Etude générale des déplacements finis". Publication de l'Institut de Mécanique Théorique et Appliquée. Paris VI

[2] R. SIESTRUNCK "Faisceaux linéaires de torseurs et rang des ensembles de torseurs". Publication de l'Institut de Mécanique Théorique et Appliquée. Paris VI.

[3] R. VOINEA - M.ATANASIU "Contribution à la théorie géométrique des vis". Buletinul Institutului Politechnic Bucuresti. Tome 21-1959 - Fascicule 3 pp.69-90.

[4] R. VOINEA - M. ATANASIU "Théorie géométrique des vis et quelques applications à la théorie des mécanismes". Revue (Roumaine) de Mécanique Appliquée 7, 1962, pp.845-860.

[5] F. BUCHSBAUM - F.FREUDENSTEIN "Synthesis of Kinematic structure of geared Kinematic chains and others mechanisms". Journal of Mechanisms 5, 1970, pp.357-392.

[6] C. BERGE "Graphes et hypergraphes". Librairie Dunod Paris 1970.

[7] V. ZINOVIEV "Théorie des mécanismes et des machines". Editions de la Paix. Moscou 1965.

[8] I.I. ARTOBOLEVSKI "Théorie des mécanismes et des machines". Editions d'Etat d'ouvrages techniques et théoriques. Moscou 1953.

[9] V.V. DOBROVOLSKI "Théorie des mécanismes". Editions de la Défense. Moscou 1953.

[10] N.I. MANOLESCU "For a united point of view in the studu of the structural analusis of Kinematic chains and mechanisms" Journ. of Mechanisms 3, 1968, pp. 149-169.

[11] P. SIESTRUNCK "Note sur la mobilité des assemblages". Publication de l'Institut de Mécanique Théorique et Appliquée. Paris VI. 1972.

TABLE DES MATIERES

1° Partie - Généralités et Rappels Page 2

1 - Les couples cinématiques 2
2 - Les familles linéaires de torseurs 3
3 - Les graphes appliqués aux assemblages 4
4 - La mobilité d'un assemblage 6

2° Partie - Indice de mobilité des mécanismes 7

1 - Etude statique 7
2 - Etude cinématique 7
3 - Réciprocité des deux points de vue 7
4 - Assemblage normal 8
5 - Exemples 8
6 - Assemblages contraints 9
7 - Les chaînes simples 11

3° Partie - Les chaînes complexes 14

1 - Idée directrice 14
2 - Train épicycloïdal 14
3 - Enoncé d'une relation de mobilité 16

Bibliographie 18